

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT , GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT 3

Câu 1. Tìm GTLN, GTNN trên $[1; 3]$ của

a) $y = x^3 - 3x^2 + 5$

b) $y = \frac{x-1}{x+3}$

Câu 2. Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng được tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức:

$$V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4 \text{ với } 0 \leq t \leq 0,5$$

Gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \leq t \leq 0,5$

a) Lượng xăng ban đầu trong bình ban đầu là 1 lít.

b) Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là 41,5 lít

c) $V'(t) = 300(2t - 3t^2) + 4$, với $0 \leq t \leq 0,5$

d) Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất

Lời giải

a) Sai: Số xăng trong bình ban đầu là $V(0) = 4$ lít

b) Đúng: Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là $V = V\left(\frac{1}{2}\right) = 41,5$ lít

c) Sai: Xét hàm số $V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4$ với $0 \leq t \leq 0,5$

Đạo hàm $V'(t) = 300t(2 - 3t)$

d) Đúng: Cho $V'(t) = 0 \Leftrightarrow 300t(2 - 3t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \in [0; 0,5] \\ t = \frac{2}{3} \in [0; 0,5] \end{cases}$

Các giá trị $V(0) = 4; V\left(\frac{1}{2}\right) = 41,5$

Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất.

Câu 3. Tại một xí nghiệp chuyên sản xuất vật liệu xây dựng, nếu trong một ngày xí nghiệp sản xuất $x(\text{m}^3)$ sản phẩm thì phải bỏ ra các khoản chi phí bao gồm: 4 triệu đồng chi phí cố định; 0,2 triệu đồng chi phí cho mỗi mét khối sản phẩm và $0,001x^2$ triệu đồng chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết rằng, mỗi ngày xí nghiệp sản xuất được tối đa 100m^3 sản phẩm. Gọi $C(x)$ là tổng chi phí để xí nghiệp sản xuất $x(\text{m}^3)$ sản phẩm trong một ngày và $\bar{C}$ là chi phí trung bình trên mỗi mét khối sản phẩm.

a) $C = 0,2x + 0,001x^2$ với $0 \leq x \leq 100$

b) Tổng chi phí sản xuất 100m^3 sản phẩm là 34 triệu đồng

c) $\bar{C} = 0,001x + \frac{4}{x} + 0,2$ với $0 \leq x \leq 100$

d) $\bar{C}$ có giá trị thấp nhất bằng 0,326 triệu đồng (kết quả làm tròn ba chữ số thập phân)

Lời giải

a) Sai: Tổng chi phí (triệu đồng) để xí nghiệp sản xuất $x(\text{m}^3)$ sản phẩm trong một ngày là:

$$C = C(x) = 4 + 0,2x + 0,001x^2 \text{ với } 0 \leq x \leq 100$$

b) Đúng: Thay $x = 100$ vào hàm $C(x)$ ta thu được kết quả là 34 triệu đồng

c) Đúng: Chi phí trung bình (triệu đồng) trên mỗi mét khối sản phẩm là

$$\bar{C} = \bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{4 + 0,2x + 0,001x^2}{x} = 0,001x + \frac{4}{x} + 0,2 \text{ với } 0 \leq x \leq 100$$

d) Đúng: Ta có $\bar{C}'(x) = 0,001 - \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 0,001 - \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4000 \Leftrightarrow x = 20\sqrt{10} \in (0; 100]$

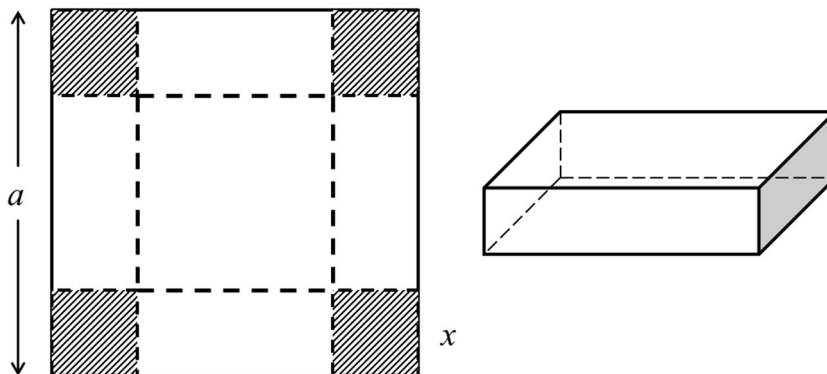
$$\bar{C}(20\sqrt{10}) = \frac{\sqrt{10}}{25} + \frac{1}{5} \approx 0,326$$

Bảng biến thiên

x	0	$20\sqrt{10}$	100
$\bar{C}'(x)$		- 0 +	
$\bar{C}(x)$	$+\infty$	$\frac{\sqrt{10}}{25} + \frac{1}{5}$	0,34

Từ bảng biến thiên, ta thấy chi phí trung bình thấp nhất là $\bar{C}(20\sqrt{10}) \approx 0,326$ (triệu đồng/ m^3 sản phẩm), đạt được khi $x = 20\sqrt{10} \approx 63 m^3$.

Câu 4. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a . Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gấp tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp.



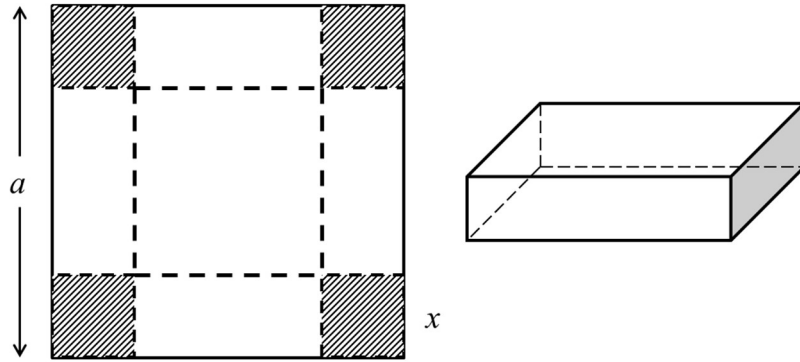
a) Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\frac{a}{12}$.

b) Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\frac{a}{6}$.

c) Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng $\frac{2a^3}{27}$.

d) Thể tích hộp lớn nhất bằng $\frac{a^3}{27}$.

Lời giải



Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông bị cắt $\left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$.

Thể tích của khối hộp là: $V(x) = x(a-2x)^2 \left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$.

$$V'(x) = (a-2x)^2 + x \cdot 2(a-2x) \cdot (-2) = (a-2x)(a-6x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{6} \left(0 < x < \frac{a}{2}\right).$$

Bảng biến thiên:

x	0	$a/6$	$a/2$	
$V'(x)$		+	0	-
$V(x)$	0	$\nearrow \frac{2a^3}{27}$	$\searrow$	0

Vậy $\max_{\left(0; \frac{a}{2}\right)} V(x) = V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27}$.

a) Sai: Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\frac{a}{12}$.

b) Đúng: Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\frac{a}{6}$.

c) Đúng: Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng $\frac{2a^3}{27}$.

d) Sai: Thể tích hộp lớn nhất bằng $\frac{a^3}{27}$.

Câu 5. Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số $P(t) = \frac{t+1}{t^2+t+4}$, trong đó $P(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t giờ sử dụng độc tố. Sau bao nhiêu giờ thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm?

Lời giải

$$\text{Xét } P'(t) = \frac{-t^2 - 2t + 3}{(t^2 + t + 4)^2} = \frac{(t-1)(-t-3)}{(t^2 + t + 4)^2}.$$

$$P'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 1 \end{cases}.$$

Ta thấy hàm số đạt cực đại tại $t = 1$ và $P'(t) < 0, \forall t \in (1; +\infty)$ nên sau 1 giờ thì vi khuẩn bắt đầu giảm.

- Câu 6.** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

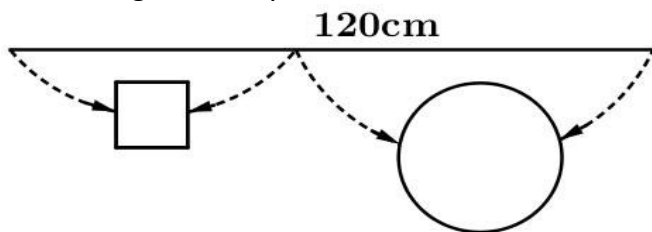
Lời giải

Ta có $v(t) = s' = -\frac{3}{2}t^2 + 12t$; $v'(t) = -3t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 4$ và có bảng biến thiên

t	0	4	6	
$v'(t)$		+	0	-
$v(t)$			24	

Vậy $\max v(t) = 24 (m/s)$ khi $t = 4$.

- Câu 7.** Một sợi dây kim loại dài 120cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất được uốn thành hình vuông, đoạn dây thứ hai được uốn thành vòng tròn (tham khảo hình bên dưới).



Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn đạt giá trị nhỏ nhất là (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Gọi độ dài của đoạn dây thứ hai là x cm.

Khi đó, độ dài của đoạn dây thứ nhất là $(120 - x)$ cm ($0 < x < 120$).

Diện tích của hình vuông bằng $\left(\frac{120-x}{4}\right)^2$ và diện tích của hình tròn bằng $\pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi}$.

Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn:

$$S(x) = \left(\frac{120-x}{4}\right)^2 + \frac{x^2}{4\pi} = \left(\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{16}\right)x^2 - 15x + 900, \quad (0 < x < 120).$$

Ta có $S(x)$ là một hàm số bậc hai, đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{120\pi}{4 + \pi} \in (0; 120)$.

$$\text{Vậy } \min S(x) = S\left(\frac{120\pi}{4 + \pi}\right) \approx 504 \text{ cm}^2.$$

- Câu 8.** Một cửa hàng bán vải Thanh Hà với giá bán mỗi kg là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 25kg. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm

4000 đồng cho một kg thì số vải bán được tăng thêm là 50kg. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi kg là 30.000 đồng.

Lời giải

Gọi x đồng ($30.000 < x < 50.000$) là giá bán vải mới để cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

Suy ra giá bán ra đã giảm là $(50.000 - x)$ đồng.

Số lượng vải bán ra đã tăng thêm là $\frac{50(50000 - x)}{4000} = 625 - 0,0125.x$.

Tổng số vải bán được là $25 + 625 - 0,0125.x = 650 - 0,0125.x$.

Doanh thu của cửa hàng là $(650 - 0,0125.x)x$.

Số tiền vốn ban đầu để mua vải là $(650 - 0,0125.x)30000$.

Vậy lợi nhuận của cửa hàng là

$$(650 - 0,0125.x)x - (650 - 0,0125.x)30000 = -0,0125x^2 + 1025x - 19500000.$$

Ta có: $f(x) = -0,0125x^2 + 1025x - 19500000 = -0,0125(x - 41000)^2 + 1512500 \leq 1512500$.

Suy ra $\max f(x) = 1512500$ khi $x = 41.000$ đồng.

Vậy giá bán mỗi cân vải là 41.000 đồng thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

Câu 9. Ông Nam cần xây dựng một bể nước mưa có thể tích $V = 8(m^3)$ dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài gấp $\frac{4}{3}$ lần chiều rộng, đáy và nắp đổ bê tông, cốt thép; xung quanh xây bằng gạch và xi măng. Biết rằng chi phí trung bình là $980.000đ/m^2$ và ở nắp để hở một khoảng hình vuông có diện tích bằng $\frac{2}{9}$ diện tích nắp bể. Tính chi phí thấp nhất mà ông Nam phải chi trả (làm tròn đến hàng nghìn đồng).

Lời giải

Gọi chiều rộng của bể là $3x$ (m), chiều dài bể là $4x$ (m) và chiều cao của bể là $\frac{2}{3x^2}$ (m).

Khi đó tổng diện tích bề mặt xây là:

$$T = (3x + 4x) \cdot 2 \cdot \frac{2}{3x^2} + 2 \cdot 3x \cdot 4x - \frac{2}{9} \cdot 3x \cdot 4x = \frac{28}{3x^2} + \frac{64x^2}{3} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{28}{3x^2} \cdot \frac{64x^2}{3}} = \frac{32\sqrt{7}}{3} (m^2).$$

Chi phí C (tính theo đồng) xây dựng là: $C = T \cdot 980000 \geq \frac{32\sqrt{7}}{3} \cdot 980000 \approx 27657000$ (đồng).

Câu 10. Lưu lượng xe ô tô vào đường hầm được cho bởi công thức $f(v) = \frac{386v}{v^2 + 2v + 5}$ (xe/giây), trong đó v (km/h) là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm. Tính vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm sao cho lưu lượng xe là lớn nhất

Lời giải

Vì v là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm $\Rightarrow v > 0$ và $\frac{5}{v} > 0$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có: $v + \frac{5}{v} \geq 2\sqrt{5} \Rightarrow v + \frac{5}{v} + 2 \geq 2\sqrt{5} + 2$

$$\Rightarrow \frac{386}{v + \frac{5}{v} + 2} \leq \frac{386}{2\sqrt{5} + 2} \Rightarrow f(v) = \frac{386v}{v^2 + 2v + 5} \leq \frac{386}{2\sqrt{5} + 2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow v = \frac{5}{v} \Leftrightarrow v^2 = 5 \Leftrightarrow v = \sqrt{5}$ (vì $v > 0$)