

ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Xác định tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

a) $y = \frac{2x-1}{x+1}$

b) $y = \frac{2x-3}{1-2x}$

c) $y = \frac{x^2-5x+4}{x^2-1}$

d) $y = \frac{2x-1}{x^2-3x+2}$

Lời giải

a) Xét $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-1}{x+1} = -\infty$ (hoặc $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x-1}{x+1} = -\infty$) nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng.

Xét $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang

b) Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-3}{1-2x} = -1$ suy ra $y = -1$ là tiệm cận ngang

Xét $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2x-3}{1-2x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{2x-3}{1-2x} = -\infty \end{cases}$ suy ra $x = \frac{1}{2}$ là tiệm cận đứng

c) Điều kiện xác định $x \neq \pm 1$

$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-5x+4}{x^2-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -(1)^-} \frac{x^2-5x+4}{x^2-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-5x+4}{x^2-1} = -\frac{3}{2} \end{cases}$ nên hàm số có tiệm cận ngang là $y = 1$ và một tiệm cận đứng

$x = -1$

d) Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x^2-3x+2} = 0$ suy ra $y = 0$ là tiệm cận ngang

• $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty$ nên $x = 1$ là đường TCD

• $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty$ nên $x = 2$ là đường TCD

: Xác định tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

a) $y = f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$

b) $y = f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Lời giải

a) Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 3$. Tương tự, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$.

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$.

b) Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1$;

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = -1.$$

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có hai tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = -1$.

Bài tập 1: Xác định tiệm cận xiên của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

a) $y = f(x) = x + \frac{1}{x+2}$

b) $y = f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x+1}$

Lời giải

a) Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$. Tương tự $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$.

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$.

b) Ta có: $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + x} = 1$; $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + 2}{x+1} = -2$.

Tương tự $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = -2$

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 2$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3}{x+2}$ là

A. $x = -2$.

B. $x = 0$.

C. $x = 3$.

D. $y = 0$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$\bullet \lim_{x \rightarrow -2^+} y = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3}{x+2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} y = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3}{x+2} = -\infty$ suy ra $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 2: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+6}{x-2}$ là đường thẳng

A. $x = 3$.

B. $x = -2$.

C. $x = -3$.

D. $x = 2$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x+6}{x-2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x+6}{x-2} = -\infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng.

Câu 3: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{x-1}$ là đường thẳng :

A. $x = 1$

B. $y = 2$

C. $x = 0$

D. $y = 0$

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x-1} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x-1} = 0$. Vậy đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	-		- 0 +	
$f(x)$	1	2	-3	3

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

Lời giải

Quan sát bảng biến thiên ta có $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	-		- 0 +	
$f(x)$	2	$+\infty$	2	$+\infty$

- A. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
 B. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.
 C. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.
 D. Đồ thị hàm số chỉ có một đường tiệm cận.

Lời giải

Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$ nên $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty \end{cases}$ nên $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-		- 0 +	
y	2	$+\infty$	-2	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0^{(+)}} y = +\infty$ nên hàm số có tiệm cận ngang là $y = 2$ và tiệm cận đứng là $x = 0$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	4	-1	$+\infty$	

Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 4$.

C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

D. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 0$.

Lời giải

Từ BBT của hàm số $y = f(x)$ ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

Và $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -1$ nên đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	+		+	0	-
y	2 ↗ 4		↖ 3 ↘ -1 -∞		

Hỏi đồ thị hàm số có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} y = -\infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -1 \Rightarrow y = -1$ là tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số có tất cả 3 đường tiệm cận.

Câu 9: Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-4}$ có phương trình là

A. $y = -2$.

B. $y = 2$.

C. $y = 0$.

D. $y = -1$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^2-4} = 0$

Vậy đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Câu 10: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?

A. $y = x^3 - x - 1$.

B. $y = \sqrt{2x^2 + 3}$.

C. $y = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$.

D. $y = \frac{3x^2 + 2x - 1}{4x^2 + 5}$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{4x^2 + 5} = \frac{3}{4}$. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = \frac{3}{4}$.

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1}$ có đồ thị (C) . Số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của (C) là

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Ta có: $\frac{2x^2 + x - 1}{x - 1} = 2x + 3 + \frac{2}{x - 1}$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + 3 + \frac{2}{x - 1} \right) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + 3 + \frac{2}{x - 1} \right) = +\infty$, suy ra đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang.

• $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1} = +\infty$, suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 1$.

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x - 1}{x - 2}$. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng:

A. $y = 2x - 1$.

B. $y = 2x + 1$.

C. $y = 2x - 3$.

D. $y = 2x + 3$.

Lời giải

Chia tử thức cho mẫu thức ta được $\begin{cases} y = 2x + 1 - \frac{1}{x - 2} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-1}{x - 2} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là

đường thẳng có phương trình $y = 2x + 1$.

- Câu 2:** Biết đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 3}$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = ax + b$. Tính $a^2 + 2b$.
- A. 4. B. 2. C. 5. D. 3.

Lời giải

Chia tử thức cho mẫu thức ta được $\begin{cases} y = x + 1 + \frac{5}{x-3} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x-3} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng có phương trình $y = x + 1$ nên $a^2 + 2b = 3$.

- Câu 3:** Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x+1}$ có phương trình là
- A. $y = x + 1$. B. $y = 2x - 1$. C. $y = x - 1$. D. $y = 2x + 1$.

Lời giải

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x+1} = 0$ nên đường thẳng $y = 2x - 1$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho.

- Câu 4:** Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$
- A. $y = x + 1$. B. $y = -3x + 1$. C. $y = x - 2$. D. $y = x - 1$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \bullet a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 2x} = 1 \\ \bullet b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1}{x - 2} = -1 \end{aligned}$$

Tương tự do $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = -1$

Vậy đường thẳng $y = x - 1$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho

- Câu 5:** Biết tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 2x}$ cắt trục tọa độ tại hai điểm A và B . Khi đó diện tích tam giác OAB là
- A. 2. B. 4. C. 8. D. 3.

Lời giải

Chia tử thức cho mẫu thức ta được $\begin{cases} y = x + 2 + \frac{4x+2}{x^2-2x} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x+2}{x^2-2x} = 0 \end{cases} \Rightarrow$ TCX $d: y = x - 2$.

Ta có $d \cap Ox$ tại điểm $(0; -2)$ và $d \cap Oy$ tại điểm $(2; 0)$

Suy ra $S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 (dvdt)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y'	—		— 0 +	
y	3 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ -2	↗ 5	

a) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$

b) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một đường tiệm cận đứng là $x = 1$

c) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một đường tiệm cận ngang là $y = 3$

d) Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)+2}$ có hai đường tiệm cận đứng

Lời giải

a) Sai: Hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1); (1; 2)$ và đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

b) Đúng: Do $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là $x = 1$

c) Đúng: Do $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 3$ nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y = 3$

d) Đúng: Dựa vào đồ thị, ta có $f(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = x_0 \in (-\infty; 1) \end{cases}$.

Hàm số $y = g(x) = \frac{1}{f(x)+2}$ có tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{x_0; 1; 2\}$.

Hàm số $y = g(x)$ liên tục trên mỗi khoảng xác định của nó.

Các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{f(x)+2} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{f(x)+2} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{f(x)+2} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{f(x)+2} = +\infty$.

Vậy hàm số $y = g(x) = \frac{1}{f(x)+2}$ có hai đường tiệm cận đứng là $x = x_0$ và $x = 2$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	—		— 0 +	
y	2 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 2	↗ $+\infty$	

- a) $f(-5) < f(4)$
- b) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2
- c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$
- d) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang

Lời giải

- a) Đúng: Từ bảng biến thiên ta thấy $f(-5) < 2$ và $f(4) > 2$ nên $f(-5) < f(4)$
- b) Sai: Do $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -\infty$ nên hàm số có không có giá trị nhỏ nhất.
- c) Đúng: Do $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$
- d) Sai: Do $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có đồ thị là (C)

- a) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
- b) Đường tiệm cận xiên của đồ thị tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 1.
- c) Giao điểm hai tiệm cận của đồ thị nằm trên parabol $y = x^2$.
- d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị vuông góc với đường thẳng $x + y - \pi = 0$.

Lời giải

- a) Đúng: Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
- b) Sai: Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng $y = x$ đi qua gốc tọa độ nên không hình thành được tam giác.
- c) Đúng: Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 1$ và đường tiệm cận xiên là $y = x$ nên giao điểm hai tiệm cận của đồ thị là $I(1;1)$ nằm trên parabol $y = x^2$.
- d) Đúng: Đường tiệm cận xiên của đồ thị $y = x$ vuông góc với đường thẳng $y = -x + \pi$

Câu 2: Cho hàm số (C): $y = f(x) = \sqrt{4x^2 + 8x - 12}$ và điểm $M \in (C)$ với $x_M < 0$

- a) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận xiên đều là các hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- b) Xét $\Delta_1: y = ax + b$ ($b > 0$) là tiệm cận xiên của (C) điểm $(1;4) \in \Delta$.
- c) Xét $\Delta_2: y = ax + b$ ($b < 0$) là tiệm cận xiên của (C) khi đó $d_{\max}(M, \Delta_2) < 2$.
- d) Hoành độ giao điểm của hai đường tiệm cận xiên bằng -2 .

Lời giải

Ta có hai đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là:

$$\begin{cases} \Delta_1: y = \sqrt{a} \left(x + \frac{b}{2a} \right) = 2x + 2 \\ \Delta_2: y = -\sqrt{a} \left(x + \frac{b}{2a} \right) = -2x - 2 \end{cases}$$

- a) Sai: Dễ thấy hai đường TCX Δ_2 không đồng biến trên $\mathbb{R}$
- b) Đúng: Thay $x = 1$ vào Δ_1 ta có $y = 2 \cdot 1 + 2 = 4$
- c) Đúng: Ta có đồ thị hàm số và tiệm cận xiên Δ_2

Tập xác định của hàm số $D = (-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.

Do $x_M < 0$ nên điểm M thuộc nhánh đồ thị bên trái nên để $d(M, \Delta_2)$ đạt giá trị lớn nhất thì

$$M \equiv A(-3; 0). \text{ Vậy } d_{\max}(M, \Delta_2) = d(A, \Delta_2) = \frac{|-2 \cdot (-3) - 1 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} < 2$$

d) Sai: Phương trình hoành độ giao điểm $2x + 2 = 2x - 2 \Leftrightarrow x = -1 \neq -2$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Gọi $I(a; b)$ là giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$$y = \frac{x-2}{x+2}. \text{ Tính } T = a + b$$

Lời giải

Hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

• $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-2)^-} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = -\infty \end{cases}$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$.

Vậy giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là điểm $I(-2; 1)$ nên $T = -2 + 1 = -1$

Câu 2: Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là $x = 2$ và tiệm cận ngang là $y = 3$. Tính giá trị biểu thức $a - 2b$

Lời giải

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ là: $x = \frac{2}{b}$.

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ là: $y = \frac{a}{b}$.

$$\text{Theo giả thiết ta có: } \begin{cases} \frac{2}{b} = 2 \\ \frac{a}{b} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a - 2b = 3 - 2 \cdot 1 = 1$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-5}{x+b}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Tính giá trị biểu thức $a^2 + b^2$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên, suy ra đường tiệm cận đứng là: $x = 2$ và đường tiệm cận ngang là: $y = 1$.

Từ hàm số $f(x) = \frac{ax-5}{x+b}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) suy ra đồ thị hàm số có ra đường tiệm cận đứng là: $x = -b$ và đường tiệm cận ngang là: $y = a$.

$$\text{Do đó ta có: } \begin{cases} -b = 2 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 5.$$

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi $M(a;b)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ dương sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai tiệm cận của (C) nhỏ nhất. Khi đó tổng $a + 2b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đường tiệm cận ngang $y = 2$ và đường tiệm cận đứng $x = 1$. Khi đó:

Khoảng cách từ $M(a;b)$ đến tiệm cận ngang là: $|b-2| = \left| \frac{2a-1}{a-1} - 2 \right| = \frac{1}{|a-1|}$ (do $M \in (C)$)

Khoảng cách từ $M(a;b)$ đến tiệm cận đứng là: $|a-1|$.

$$\text{Ta có } |a-1| + \frac{1}{|a-1|} \geq 2\sqrt{|a-1| \cdot \frac{1}{|a-1|}} = 2.$$

Vậy tổng khoảng cách nhỏ nhất là 2 khi $|a-1| = \frac{1}{|a-1|}$.

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 - 2a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 (\text{loại}) \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 3 \Rightarrow a + 2b = 8.$$

Câu 1: Tính tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 4}$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = -\infty \Rightarrow x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Tương tự hàm số có thêm một tiệm cận đứng khác là $x = 2$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là 3

Câu 2: Tìm giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 + 3mx - m + 2}{x - 1}$ có tiệm cận xiên tạo với các trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 4.

Lời giải

$$\text{Ta có } y = \frac{2x^2 + 3mx - m + 2}{x - 1} = 2x + 3m + 2 + \frac{2m + 4}{x - 1}.$$

Với $m = -2$ thì hàm số trở thành $y = 2x - 4$. Đây là hàm số bậc nhất nên không có tiệm cận.

$$\text{Với } m \neq -2 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (2x + 3m + 2)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2m + 4}{x - 1} = 0.$$

Do đó với $m \neq -2$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $\Delta: y = 2x + 3m + 2$.

Δ cắt trục hoành tại điểm $A\left(\frac{-3m - 2}{2}; 0\right)$ và cắt trục tung tại $B(0; 3m + 2)$.

$$\text{Từ đó } OA = \frac{|-3m - 2|}{2} = \frac{|3m + 2|}{2}, \quad OB = |3m + 2|.$$

$$\text{Theo giả thiết: } S_{OAB} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} OA \cdot OB = 4 \Leftrightarrow \frac{|3m + 2|}{2} \cdot |3m + 2| = 8 \Leftrightarrow (3m + 2)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 2 = -4 \\ 3m + 2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \text{ (loại)} \\ m = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m = \frac{2}{3}$.