

KHẢO SÁT HÀM SỐ

Bài tập 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 1$

b) $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$

c) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

d) $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

Lời giải

a) $y = x^3 - 3x^2 + 1$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

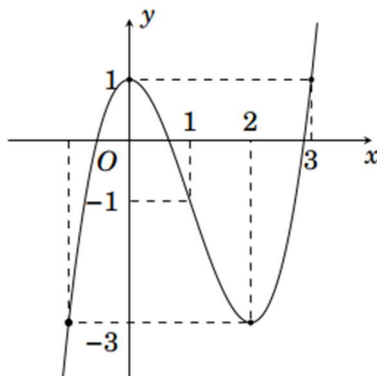
Sự biến thiên: $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			1		-3		$+\infty$
	$-\infty$						

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ và đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0; y_{CD} = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 2; y_{CT} = -3$.



Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(2; -3); (-1; -3); (3; 1)$

Đồ thị nhận điểm $I(1; -1)$ làm tâm đối xứng

b) $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Sự biến thiên: $y' = -6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$

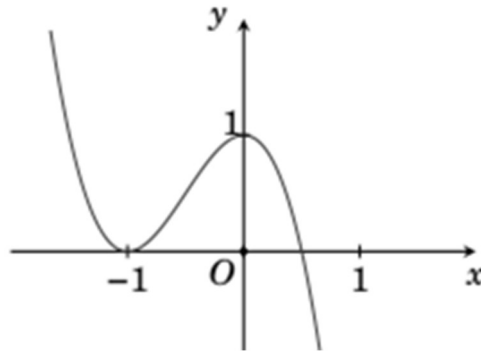
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		0	1		$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ và nghịch biến trên mỗi

khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; +\infty)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0; y_{CD} = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = -1; y_{CT} = 0$.



Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(1; -4); (-2; 5)$

Đồ thị nhận điểm $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ làm tâm đối xứng

c) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

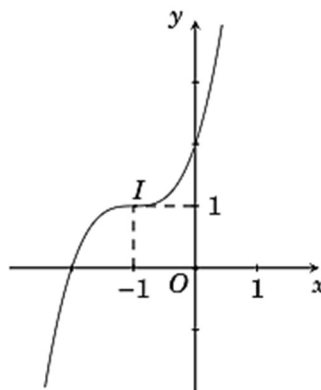
Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Sự biến thiên: $y' = 3x^2 + 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+	0	+
y	$-\infty$	1	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và hàm số không có cực trị



Đồ thị nhận điểm $I(-1; 1)$ làm tâm đối xứng

d) $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Sự biến thiên: $y' = 3x^2 - 6x + 4 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$

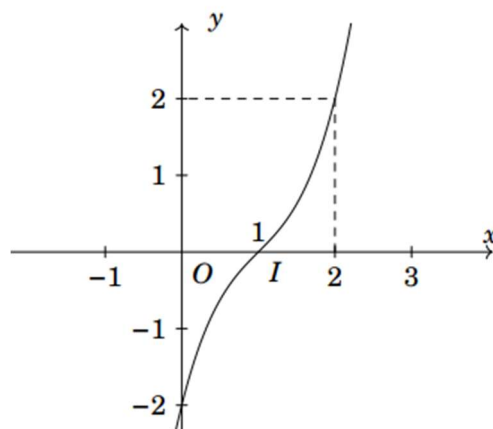
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$+\infty$
y'	+	
y	$-\infty$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và hàm số không có cực trị

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(2; 2); (0; -2); (1; 0)$

Đồ thị nhận điểm $I(1; 0)$ làm tâm đối xứng



Bài tập 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{x+1}{x-2}$

b) $y = \frac{2x+1}{x+1}$

c) $y = \frac{x+3}{1-x}$

d) $y = \frac{5+x}{2-x}$

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Sự biến thiên: $y' = -\frac{3}{(x-2)^2} < 0$ với mọi $x \neq 2$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ và hàm số không có cực trị.

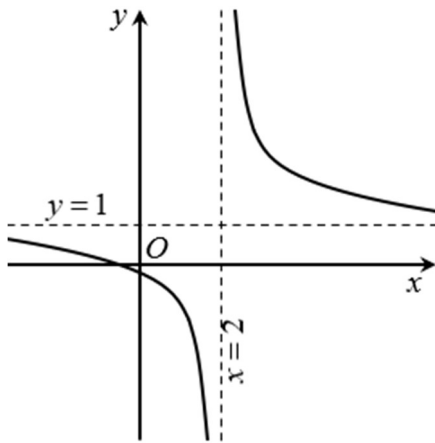
Tiệm cận:

• $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1$.

Do đó, đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Đồ thị



Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là điểm $(-1; 0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2; 1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.

b) $y = \frac{2x+1}{x+1}$

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$y' = \frac{2(x+1) - (2x-1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

Sự biến thiên: Đạo hàm : với mọi $x \neq -1$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Tiệm cận:

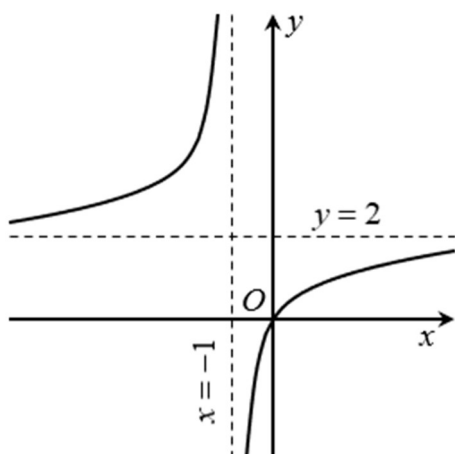
• $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2x+1}{x+1} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{2x+1}{x+1} = -\infty$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 2$

Do đó $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	$-\infty$

Đồ thị



Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0;1)$ và giao với trục hoành tại điểm $\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $(-1;2)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận này là trục đối xứng.

c) $y = \frac{x+3}{1-x}$

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$y' = \frac{(1-x) + (x+3)}{(1-x)^2} = \frac{4}{(1-x)^2} > 0$$

Sự biến thiên có đạo hàm với mọi $x \neq 1$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Tiệm cận

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{1-x} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+3}{1-x} = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}-1} = -1; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}-1} = -1$$

Do đó $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

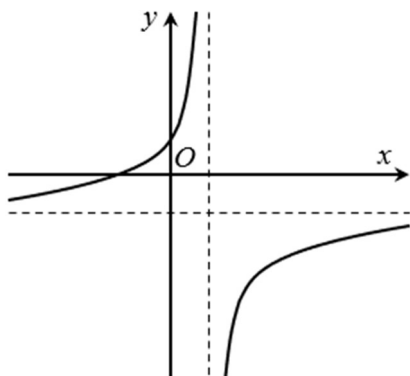
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+		+
y	-1	$+\infty$	-1

Đồ thị

Giao điểm của đồ thị với trục tung là $(0;3)$, giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(-3;0)$.

Đồ thị của hàm số nhận giao điểm $I(1;-1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.



d) $y = \frac{5+x}{2-x}$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Sự biến thiên: Đạo hàm $y' = \frac{7}{(-x+2)^2} > 0$ với mọi $x \neq 2$

Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{1-x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+3}{1-x} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -1$

Do đó $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

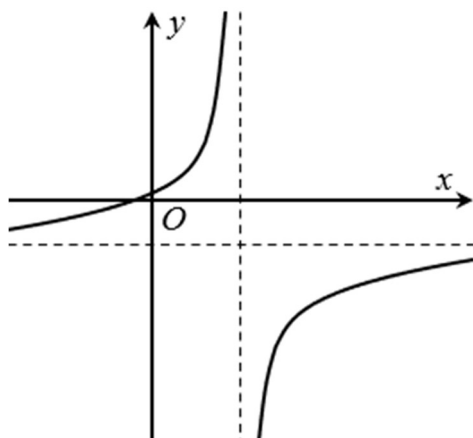
x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	+		+
y	-1	$+\infty$	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ và hàm số không có cực trị.

Đồ thị

Giao điểm của đồ thị với trục tung là $(0; 3)$, giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(-3; 0)$.

Đồ thị của hàm số nhận giao điểm $I(1; -1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm trục đối xứng.



Bài tập 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$

b) $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$

c) $y = \frac{2x^2 - x + 4}{x - 1}$

d) $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3}$

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Sự biến thiên: $y = x + 1 + \frac{1}{x-2}$.

Ta có: $y' = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$. $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.

Trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$ $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên từng khoảng này.

Trên các khoảng $(1; 2)$ và $(2; 3)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng này.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ với $y_{CD} = 1$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ với $y_{CT} = 5$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = +\infty.$$

Tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(x + 1 + \frac{1}{x-2} \right) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(x + 1 + \frac{1}{x-2} \right) = +\infty$

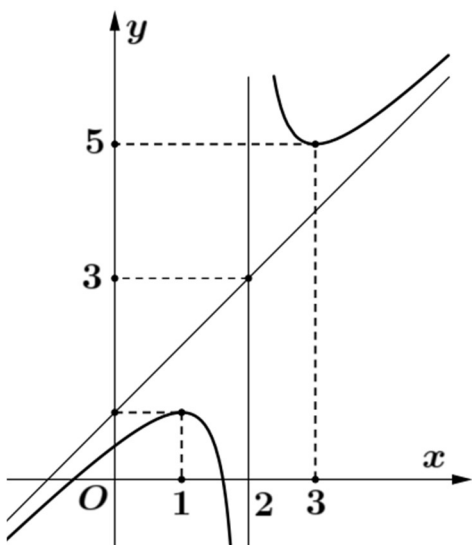
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x+1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-2} = 0.$$

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow$ 1	$\searrow$ $-\infty$	$+\infty$ $\searrow$ 5	$\nearrow$ $+\infty$	

Đồ thị:



Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Ta có $y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ hoặc $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right)$ và $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 0\right)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2;3)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

b) Tập xác định của hàm số: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Sự biến thiên: Viết $y = x - \frac{2}{x+1}$ ta có $y' = 1 + \frac{2}{(x+1)^2} > 0$ với mọi $x \neq -1$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$. Hàm số không có cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$$

•
Tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(x - \frac{2}{x+1}\right) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(x - \frac{2}{x+1}\right) = -\infty$

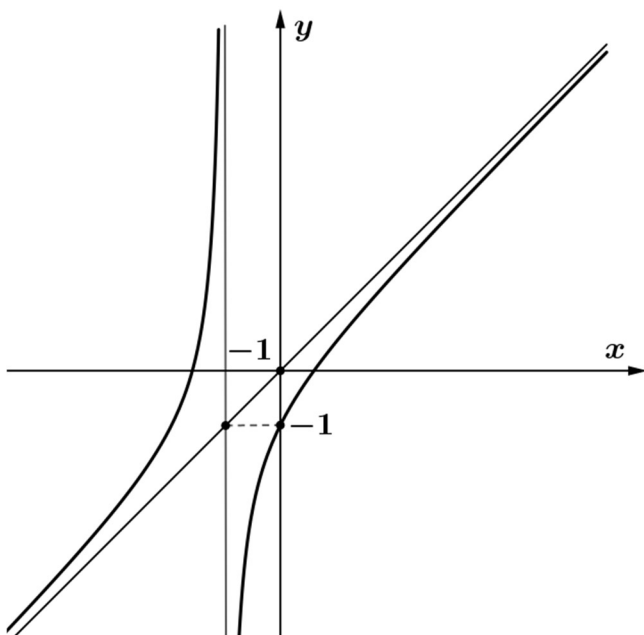
• $\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{x+1}\right) = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2}{x+1}\right) = 0.$

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Đồ thị :



Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là điểm $(0; -2)$

Ta có $y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 1$.

Do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là các điểm $(-2; 0)$ và $(1; 0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-1; -1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.

c) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Sự biến thiên: Ta có $y = \frac{2x^2 - x + 4}{x - 1} = 2x + 1 + \frac{5}{x - 1}$

Đạo hàm $y' = 2 - \frac{5}{(x - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{5}{(x - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 - \sqrt{10}}{2}$ hoặc $x = \frac{2 + \sqrt{10}}{2}$.

Trên các khoảng $\left(-\infty; \frac{2 - \sqrt{10}}{2}\right)$ và $\left(\frac{2 + \sqrt{10}}{2}; +\infty\right)$ có $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên từng khoảng này.

Trên các khoảng $\left(\frac{2 - \sqrt{10}}{2}; 1\right)$ và $\left(1; \frac{2 + \sqrt{10}}{2}\right)$ có $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

Hàm số đạt cực cực đại tại $x = \frac{2 - \sqrt{10}}{2}$ và đạt cực tiểu tại $x = \frac{2 + \sqrt{10}}{2}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = -\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x - 1} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x - 1} = 0$

Do đó $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y = 2x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên

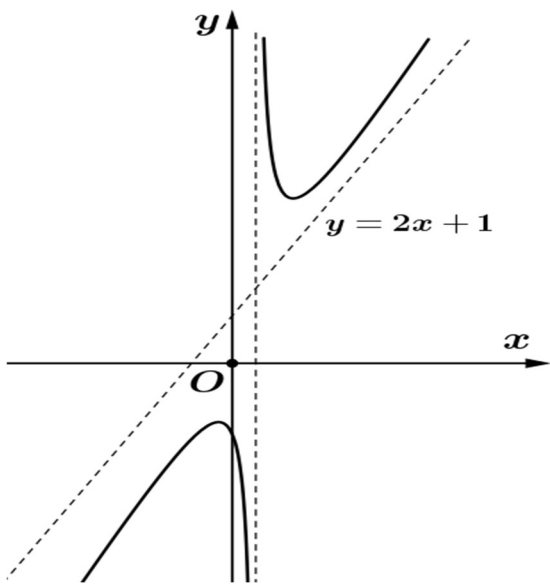
x	$-\infty$	$\frac{1}{2} \left(-\sqrt{10} + 2 \right)$	1	$\frac{1}{2} \left(\sqrt{10} + 2 \right)$	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$-2\sqrt{10} + 3$	$+\infty$	$2\sqrt{10} + 3$	$+\infty$	

Đồ thị

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0; -4)$.

Đồ thị hàm số không cắt trục hoành.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(1; 3)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.



Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Sự biến thiên: Ta có $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} = x - 1 + \frac{4}{x + 3}$

Đạo hàm $y' = 1 - \frac{4}{(x + 3)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{(x + 3)^2} = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -5 \end{cases}$

Trên các khoảng $(-\infty; -5)$ và $(-1; +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên các khoảng này.

Trên các khoảng $(-5; -3)$ và $(-3; -1)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên các khoảng này.

Hàm số đạt cực đại tại $x = -5$ với $y_{CD} = -8$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ với $y_{CT} = 0$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 + \frac{3}{x}\right)} = +\infty;$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 + \frac{3}{x}\right)} = -\infty$$

Tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow (-3)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} = -\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x + 3} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x + 3} = 0$$

Do đó $x = -3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số và $y = x - 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên

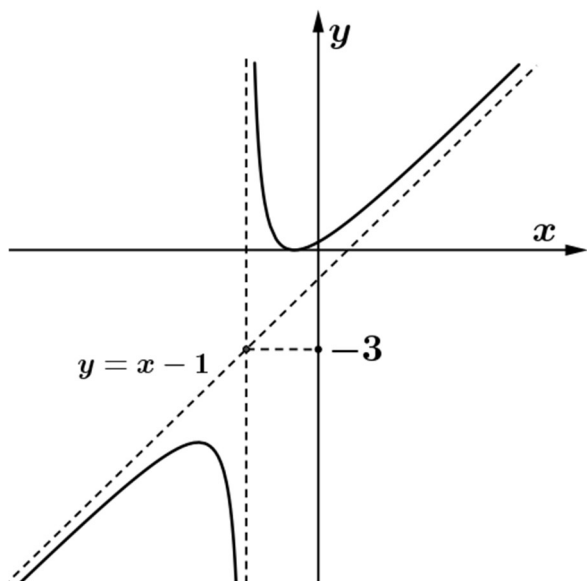
x	$-\infty$	-5	-3	-1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-8	$+\infty$	0	$+\infty$	

Đồ thị:

Giao điểm của đồ thị với trục tung là $\left(0; \frac{1}{3}\right)$

Giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(-1; 0)$.

Đồ thị hàm số nhận giao điểm $(-3; -4)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng và nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận này làm các trục đối xứng.



Câu 1: Bảng biến thiên ở hình bên là một trong bốn hàm số nào sau đây?

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		1		5	$-\infty$

A. $y = -x^3 - 3x^2$.

B. $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

C. $y = x^3 + 2x^2 + 1$.

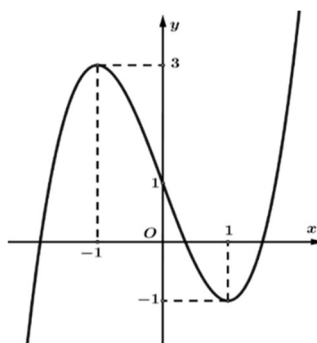
D. $y = -x^3 + 3x + 1$.

Lời giải

Ta thấy đây là hàm số bậc ba và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ nên $a < 0$

Ta có $f(0) = 1$ nên hàm số cần tìm là $y = -x^3 + 3x + 1$

Câu 2: Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



A. $y = x^3 - 3x + 1$.

B. $y = x^3 - 3x - 1$.

C. $y = -x^3 - 3x - 1$.

D. $y = -x^3 + 3x + 1$.

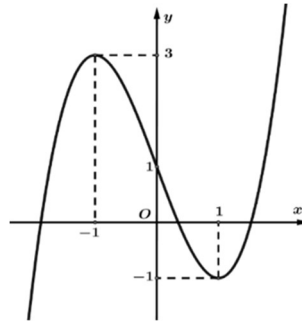
Lời giải

Đồ thị hàm số trên là đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

Nhìn vào nhánh phải của đồ thị ta thấy đồ thị có hướng đi lên suy ra $a > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ $y = 1$. Vậy hàm số thỏa đề là $y = x^3 - 3x + 1$.

Câu 3: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

B. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$

C. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$

D. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

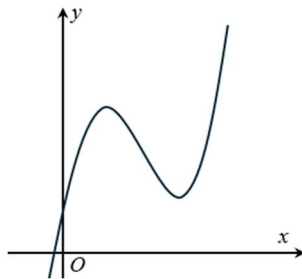
Lời giải

Quan sát đồ thị hàm số ta thấy: $a > 0$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương $\Rightarrow d > 0$.

Hàm số có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{a} < 0 \\ \frac{c}{a} < 0 \end{cases} \Rightarrow b < 0; c < 0.$$

Câu 4: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?



A. $y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1$.

B. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

C. $y = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + \frac{9}{2}x + 1$.

D. $y = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x + 1$.

Lời giải

Dựa vào dạng đồ thị ta có $a > 0$.

$y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1 \Rightarrow y(1) = 1$ (loại); $y = x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow y(1) = -1$ (loại).

Xét hàm $y = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x + 1$, $y' = \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 3 \\ x = 3 \Rightarrow y = 1. \end{cases}$

Vậy đồ thị là của hàm số $y = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x + 1$.

Câu 1: Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình dưới đây?

x	0	2	$+\infty$
y'	—		—
y	2	$+\infty$	2

A. $y = \frac{2x-7}{x-2}$. **B.** $y = \frac{2x+1}{x+2}$. **C.** $y = \frac{2x+1}{x-2}$. **D.** $y = \frac{1-2x}{x-2}$.

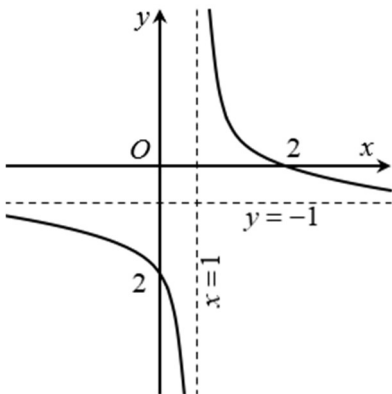
Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$ nên ta loại đáp án **B**.

Dựa vào bảng biến thiên, đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$ nên ta loại đáp án **D**.

Xét đáp án A có $y' = \frac{3}{(x-2)^2} > 0$ nên loại đáp án **A**.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ bên



Tích $a.b$ bằng

A. 2 . **B.** -3 . **C.** -2 . **D.** 3 .

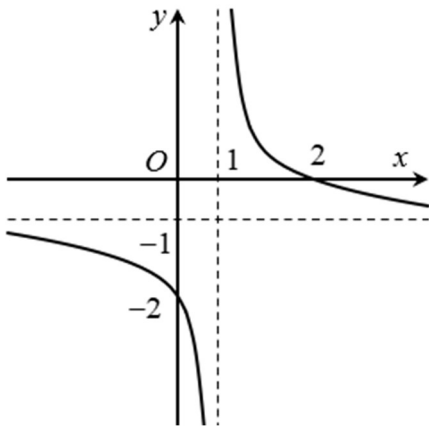
Lời giải

Từ đồ thị ta có tiệm cận ngang $y = -1$ nên $a = -1$.

Và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 nên

$M(2;0) \in y = \frac{-x-b}{x-1} \Leftrightarrow b = -2$. Vậy $a.b = 2$.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Giá trị của $a + 2b + 3c$ bằng

A. 2. B. 0. C. 6. D. -8.

Lời giải

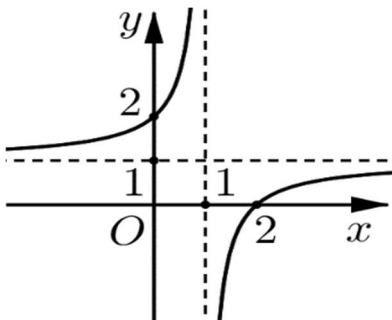
Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số: $x = -c$ suy ra $-c = 1 \Leftrightarrow c = -1$.

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số: $y = a$ suy ra $a = -1$.

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $\left(0; \frac{b}{c}\right)$ nên $\frac{b}{c} = -2$ mà $c = -1$ suy ra $b = 2$.

Vậy, $a + 2b + 3c = 0$.

Câu 4: Đường cong ở hình dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \frac{x+a}{bx+c}$, $(a, b, c \in \mathbb{Z})$. Khi đó giá trị biểu thức $T = a - 3b - 2c$ bằng



A. 3. B. 2. C. 0. D. -3.

Lời giải

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1 \Rightarrow \frac{1}{b} = 1 \Leftrightarrow b = 1$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1 \Rightarrow -\frac{c}{b} = 1 \Leftrightarrow b = -c \Rightarrow c = -1$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 2) \Rightarrow 2 = \frac{0+a}{1.0+(-1)} \Leftrightarrow a = -2$.

Vậy $T = a - 3b - 2c = (-2) - 3.1 - 2.(-1) = -3$.

Câu 1: Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

x	$-\infty$	-10	-4	2	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$				$+\infty$		
			24			0	
					$-\infty$		$-\infty$

A. $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{-x - 4}$. B. $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{-x - 4}$. C. $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 4}$. D. $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x + 4}$.

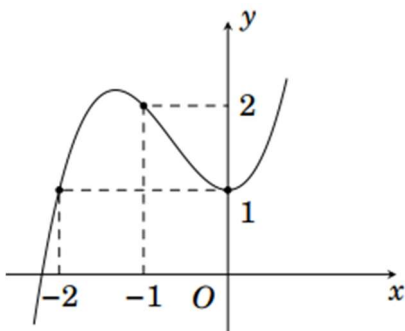
Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 4$ và các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

Điểm cực đại $A(2;0)$ và điểm cực tiểu $B(-10;24)$. Do đó hàm số cần tìm là $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{-x - 4}$

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



- a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$
- b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0;1)$
- c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$
- d) $2a + 3b + c = 9$

Lời giải

- a) Sai: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, giá trị cực tiểu là $y = 1$
- b) Đúng: Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0;1)$
- c) Sai: Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; x_0)$ với $-2 < x_0 < -1$
- d) Sai: Đồ thị đi qua ba điểm $(-2;1); (-1;2); (0;1)$ và đạt cực trị tại $x = 1$ nên ta được hệ:

$$\begin{cases} -8a + 4b - 2c + d = 1 \\ -a + b - c + d = 2 \\ d = 1 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1; b = 2; c = 0; d = 1 \Rightarrow 2a + 3b + c = 8$$

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-1}{bx+c}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$ ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ $\frac{1}{2}$

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$
- b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = \frac{1}{2}$
- c) Đồ thị giao với trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 3
- d) $\begin{cases} b > \frac{2}{3} \\ b < 0 \end{cases}$

Lời giải

- a) Đúng: Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$ nên nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$
- b) Sai: Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 3$
- c) Đúng: Đồ thị giao với trục hoành tại điểm thuộc nhánh trái của đồ thị, suy ra hoành độ giao điểm này nhỏ hơn 3
- d) Đúng: Từ bảng biến thiên suy ra $\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \\ -\frac{c}{b} = 3 \end{cases} \quad (1)$

Ta có: $y' = \frac{ac+b}{(bx+c)^2} < 0, \forall x \neq -\frac{c}{b} \Leftrightarrow ac+b < 0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{b}{2} \cdot (-3b) + b < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b > \frac{2}{3} \\ b < 0 \end{cases}$

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$ có đồ thị là (C) .

- a) Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang
- b) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm M . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $3x - 4y + 2 = 0$

c) Đồ thị (C) có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy .

d) Đồ thị không cắt trục Ox .

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ và có đạo hàm $y' = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$				
y'	+	0	-	-	0	+			
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$+\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$+\infty$

a) Sai: Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang

b) Đúng: Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $M\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ và $y'(0) = \frac{3}{4}$ nên phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

c) Sai: Hàm số đạt cực trị tại $x=1$ và $x=3$ nên 2 điểm cực trị nằm cùng phía đối với Oy .

d) Sai: Ta có $y = \frac{x^2 - x - 1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ do đó giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right)$ và $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 0\right)$

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = 2x + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt?

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - 3x^2 + mx + 1 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + (m-2)x = 0$

$\Leftrightarrow x(x^2 - 3x + m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2 - 3x + m - 2 = 0 \end{cases}$. Đặt $f(x) = x^2 - 3x + m - 2$.

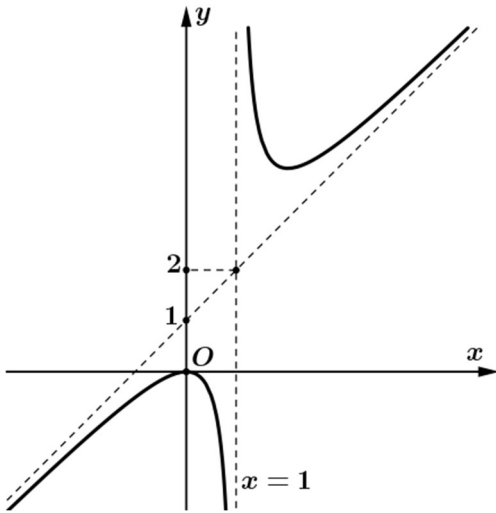
Để đồ thị (C) cắt đường thẳng d tại 3 điểm phân biệt thì phương trình

$x^3 - 3x^2 + (m-2)x = 0$ phải có 3 nghiệm phân biệt, khi đó $f(x) = 0$ phải có hai nghiệm phân

biệt khác 0. Do đó $\begin{cases} f(0) \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \neq 0 \\ 9-4(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ -4m > -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m < \frac{17}{4} \end{cases}$.

Do m là số nguyên dương nên $m \in \{1, 3, 4\}$.

Câu 1: Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số $y = ax + b + \frac{1}{x+c}$



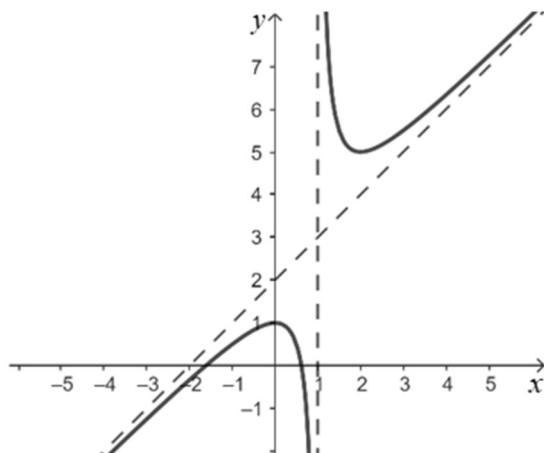
Khi đó tổng $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $y = ax + b$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số. Từ đồ thị ta suy ra được $y = x + 1$ là tiệm cận xiên nên $a = 1, b = 1$

$x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nên $c = -1$. Vậy $a + b + c = 3$

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a > 0, m \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi trong các số b, c, m, n có tất cả bao nhiêu số dương?



Lời giải

Ta có: $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n} (a > 0, m \neq 0); D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-n}{m} \right\}$

Tiệm cận xiên $y = x + 2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx} \right) = \frac{a}{m} = 1 \Leftrightarrow a = m > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{ax^2 + bx + c}{mx + n} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(b+n)x + c}{mx + n} \right] = \frac{b+n}{m} = 2$$

$$\Leftrightarrow b + n = 2m \Leftrightarrow b - m = 2m \Leftrightarrow b = 3m = 3a > 0$$

Tiệm cận đứng $x = \frac{-n}{m} = 1 \Leftrightarrow n = -m = -a < 0$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại $y_0 = \frac{c}{n} > 0 \Rightarrow c < 0$