

ĐÁP ÁN GTLN 1

Bài tập 1:

a) $y = f(x) = x^3 - 33x$ trên đoạn $[2; 19]$

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 33 \text{ và } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 11 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{11}$$

Xét trên $[2; 19]$ ta có $x = \sqrt{11} \in [2; 19]$ ta có $f(2) = -58; f(\sqrt{11}) = -22\sqrt{11}; f(19) = 6232$.

$$\text{Vậy } \min_{[2; 19]} f(x) = f(\sqrt{11}) = -22\sqrt{11}; \max_{[2; 19]} f(x) = f(19) = 6232.$$

b) $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ trên đoạn $[1; 3]$

Ta có $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ là hàm đa thức nên $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$.

$$\text{Trên đoạn } [1; 3] \text{ ta có } f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1; 3] \\ x = 2 \in [1; 3] \end{cases}.$$

Khi đó $f(1) = 1; f(2) = -1; f(3) = 3$. Vậy $\min_{[1; 3]} f(x) = f(2) = -1; \max_{[1; 3]} f(x) = f(3) = 3$

c) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$

Hàm số đã cho xác định với mọi $x \in [2; 4]$ và có đạo hàm $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$.

Trên đoạn $[2; 4]$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Khi đó: $f(2) = 7, f(3) = 6, f(4) = \frac{19}{3}$. Vậy $\min_{[2; 4]} f(x) = 6; \max_{[2; 4]} f(x) = f(2) = 7$.

d) $y = f(x) = \frac{3x - 1}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 2]$

Xét hàm số $f(x) = \frac{3x - 1}{x + 1}$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; Hàm số liên tục trên đoạn $[0; 2]$ và $f'(x) = \frac{4}{(x + 1)^2} > 0, \forall x \neq -1$;

Khi đó: $f(0) = -1; f(2) = \frac{5}{3}$. Vậy $\min_{[0; 2]} f(x) = f(0) = -1; \max_{[0; 2]} f(x) = f(2) = \frac{5}{3}$

e) $y = 1 + \frac{1}{x}$ trên đoạn $[1; 2]$

Ta có $y' = -\frac{1}{x^2} < 0 \forall x \in [1; 2]$ nên hàm số nghịch biến trên $[1; 2]$.

Do đó: $M = \max_{[1; 2]} y = y(1) = 2, m = \min_{[1; 2]} y = y(2) = \frac{3}{2}$.

f) $y = f(x) = \frac{4}{x} + x + 1$ trên đoạn $[1; 3]$

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[1;3]$ và có đạo hàm $f'(x) = -\frac{4}{x^2} + 1$

$$\text{Giải } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \notin (1;3) \\ x = 2 \in (1;3) \end{cases}. \text{Ta có } f(1) = 6; f(2) = 5; f(3) = \frac{16}{3}.$$

$$\text{Vậy } \min_{[1;3]} f(x) = 5; \max_{[1;3]} f(x) = 6.$$

Bài tập 2: a) $y = x - \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; e\right]$.

$$\text{Tập xác định } D = (0; +\infty). \text{ Ta có } y' = 1 - \frac{1}{x}. \text{ Xét } y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in \left[\frac{1}{2}; e\right]$$

$$\text{Xét } y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \ln 2, y(1) = 1, y(e) = e - 1. \text{ Do đó } m = \min_{\left[\frac{1}{2}; e\right]} y = 1 \text{ và } M = \max_{\left[\frac{1}{2}; e\right]} y = e - 1.$$

$$\text{b) } y = x + \cos^2 x \text{ trên đoạn } \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

$$\text{Hàm số liên tục trên đoạn } \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \text{ có } y' = 1 - 2\cos x \sin x = 1 - \sin 2x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \text{ Do } x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} y(0) = 1 \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Vậy } \max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}; \min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} y = 1.$$

Bài tập 3: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số sau trên miền đã chỉ ra

$$\text{a) } f(x) = \frac{5\sin x + 1}{\sin x + 2} \text{ trên đoạn } \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$$

$$\text{b) } y = \cos^3 x + 2\sin^2 x + \cos x \text{ trên miền xác định}$$

Lời giải

$$\text{a) } f(x) = \frac{5\sin x + 1}{\sin x + 2} \text{ trên đoạn } \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \text{ với } x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right] \text{ thì } t \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \text{ nên khi đó ta được hàm số } g(t) = \frac{5t + 1}{t + 2}$$

$$\text{Đạo hàm } g'(t) = \frac{9}{(t + 2)^2} > 0, \forall t \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$$

$$\text{Do } g(0) = \frac{1}{2}; g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{5} \text{ nên } \min_{\left[0; \frac{1}{2}\right]} g(t) = g(0) = \frac{1}{2} \text{ nên } \min_{\left[0; \frac{\pi}{6}\right]} f(x) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{b) } y = \cos^3 x + 2\sin^2 x + \cos x \text{ trên miền xác định}$$

$$\text{Ta có } y = \cos^3 x + 2\sin^2 x + \cos x = \cos^3 x + 2(1 - \cos^2 x) + \cos x = \cos^3 x - 2\cos^2 x + \cos x + 2$$

Đặt $t = \cos x$ với $t \in [-1; 1]$ ta được $f(t) = t^3 - 2t^2 + t + 2$

Ta có $f'(t) = 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in [-1; 1] \\ t = \frac{1}{3} \in [-1; 1] \end{cases}$ mà $f(-1) = -2$; $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{58}{27}$; $f(1) = 2$

Vậy $\max_{x \in \mathbb{R}} y = \max_{t \in [-1; 1]} f(t) = \frac{58}{27}$

Bài tập 4: Độ giảm huyết áp của một bệnh $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$ trong đó x là số miligam thuốc được tiêm cho bệnh nhân ($0 < x < 30$). Để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là bao nhiêu mg ?

Lời giải

Ta có: $G'(x) = 1,5x - 0,075x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 20 \end{cases}$. Bảng biến thiên:

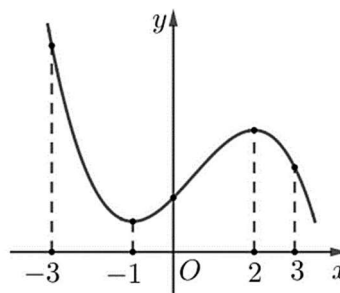
x	0	20	30	
$G'(x)$		+	0	-
$G(x)$	0	$\nearrow G_{max}$	$\searrow$	0

Vậy để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là $20(mg)$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

A. $f(2)$.

B. $f(-1)$.

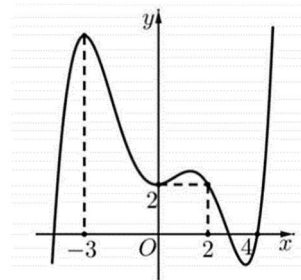
C. $f(-3)$.

D. $f(3)$

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-3;3]$ bằng $f(-3)$

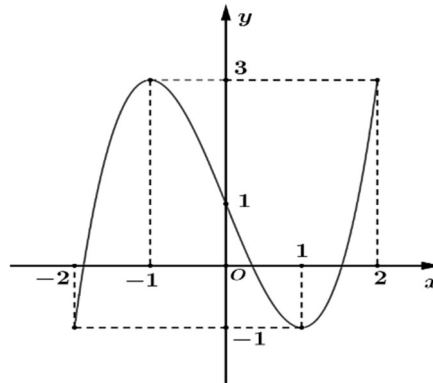
- Câu 2:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3;4]$ bằng:
- A. $f(2)$. B. $f(-3)$. C. $f(4)$. D. $f(0)$



Lời giải

Quan sát hình vẽ ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3;4]$ bằng $f(-3)$.

- Câu 3:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ có đồ thị như hình vẽ



Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;2]$ là

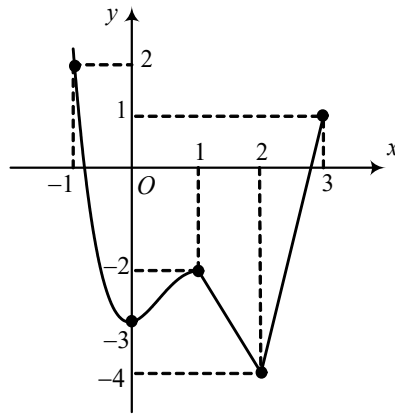
- A. 1. B. -1. C. -2. D. 3.

Lời giải

Trên đoạn $[-2;2]$ ta có $f(x) \geq -1$ và $f(x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$

Vậy $\min_{[-2;2]} f(x) = -1$.

- Câu 4:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;3]$. Khi đó, tổng $M + m$ bằng



A. -6.

B. -2.

C. -5.

D. 2.

Lời giải

Theo đồ thị, ta có : $M = 2$ và $m = -4 \Rightarrow M + m = -2$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	-3	-1	0	1	2
y	-2	3	0	2	1

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3; 2]$.

Tính $M + m$.

A. -1.

B. 1.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $M = 3, m = -2 \Rightarrow M + m = 1$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$

Biết $f(-2) = f(0) = -3$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-2; 0]$ bằng

A. $f(-1)$.

B. -3.

C. $-f(-1)$.

D. 3.

Lời giải

Dựa vào bảng dấu của đạo hàm ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$			-3		-3		
$ f(x) $				$f(-1)$			
				$-f(-1)$			

Dựa vào bảng biến thiên $y = |f(x)|$ trên đoạn $[-2; 0]$ ta có $\max_{[-2; 0]} |f(x)| = -f(-1)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-3; 2]$. Tính $M.m$.

x	-3	0	1	2
$f(x)$		2	0	1
	-4			

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. -8.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta xác định được $M = 2$ và $m = -4$.

Từ đó suy ra $M.m = 2.(-4) = -8$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau.

x	0	3	8
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	10	0

Hàm số đạt giá trị lớn nhất là $f(x_0)$ tại x_0 . Khi đó tích $x_0.f(x_0)$ bằng

A. 30.

B. 3.

C. 10.

D. 0.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy, hàm số đạt giá trị lớn nhất là 10 tại $x = 3$ nên $x_0.f(x_0) = 30$.

Câu 9: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 6x$ trên $[-1; 4]$ là

A. $-4\sqrt{2}$.

B. -5.

C. 5.

D. 40.

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{2} \in [-1; 4].$$

Khi đó $f(-1) = -1 + 6 = 5$, $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$, $f(4) = 64 - 24 = 40$.

Vậy $\min_{[-1;4]} f(x) = -4\sqrt{2}$ tại $x = \sqrt{2}$.

Câu 10: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ trên đoạn $[0;4]$. Tính tổng $S = M + m$.

A. $\frac{7}{3}$.

B. 1.

C. $\frac{10}{3}$.

D. 4.

Lời giải

Để thấy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Ta có: $y(0) = 1$; $y(1) = \frac{7}{3}$; $y(3) = 1$; $y(4) = \frac{7}{3}$.

Vậy $\begin{cases} M = \max_{[0;4]} y = y(1) = y(4) = \frac{7}{3} \\ m = \min_{[0;4]} y = y(0) = y(3) = 1 \end{cases} \Rightarrow S = M + m = \frac{7}{3} + 1 = \frac{10}{3}$.

Câu 11: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 10$ trên đoạn $[-5;-1]$ bằng

A. 12.

B. 18.

C. -40.

D. 14.

Lời giải

Trên đoạn $[-5;-1]$ ta có hàm số đã cho liên tục và có

$y' = 3x^2 + 6x \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow x = -2$; $y(-5) = -40$; $y(-2) = 14$; $y(-1) = 12$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-5;-1]$ bằng 14.

Câu 12: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[2;4]$ là:

A. $\min_{[2;4]} y = 5$.

B. $\min_{[2;4]} y = 0$.

C. $\min_{[2;4]} y = 3$.

D. $\min_{[2;4]} y = 7$.

Lời giải

Ta có $y = x^3 - 3x + 5 \Rightarrow y = 3x^2 - 3$. Giải $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \notin [2;4] \\ x = -1 \notin [2;4] \end{cases}$.

Ta có $y(2) = 7$; $y(4) = 57 \Rightarrow \min_{[2;4]} y = y(2) = 7$.

Câu 13: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$ là

A. 7.

B. 8.

C. $\frac{19}{3}$.

D. $\frac{23}{3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = \left(\frac{x^2 + 3}{x-1} \right)' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [2; 4] \\ x = 3 \in [2; 4] \end{cases}.$$

Lại có $f(2) = 7 > f(4) = \frac{19}{3} > f(3) = 6$ suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x-1}$ trên đoạn $[2; 4]$ là 7.

Câu 14: Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$. Tổng $S = 2M - m$ bằng

A. $S = 0$.

B. $S = -\frac{3}{2}$.

C. $S = -2$.

D. $S = 4$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{2\sqrt{x+1}}.$$

$$\text{Giải phương trình } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ta có $f(0) = -1; f(3) = -\frac{1}{2}$ và hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$.

$$\text{Vậy } M = -\frac{1}{2}; m = -1 \Rightarrow S = 2M - m = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0.$$

Câu 15: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \cos^2 x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ là

A. $\max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{1}{2}; \min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = -1$.

B. $\max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{\pi}{4}; \min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{\pi}{6}$.

C. $\max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}; \min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = 1$.

D. $\max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}; \min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f(x) = x + \cos^2 x \Rightarrow f'(x) = 1 - 2\cos x \cdot \sin x = 1 - \sin 2x.$$

$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi. \text{ Do } x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}.$$

$$f(0) = 1; f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \text{ và hàm số } f(x) \text{ liên tục trên đoạn } \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$$

Suy ra $\max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}; \min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = 1.$

Câu 16: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+2}{x}$ trên $[1; 2]$

- A.** $\min_{[1;2]} y = 3.$ **B.** $\min_{[1;2]} y = 2.$ **C.** $\min_{[1;2]} y = \frac{1}{2}.$ **D.** $\min_{[1;2]} y = \frac{3}{2}.$

Lời giải

Ta có $y' = -\frac{2}{x^2} < 0, \forall x \neq 0$ nên hàm số $y = \frac{x+2}{x}$ nghịch biến trên $[1; 2]$

Do đó $\min_{[1;2]} y = y(2) = 2.$

Câu 17: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{16 - x^2}$ là

- A.** 16. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $y = \sqrt{16 - x^2} \leq 4$, dấu "=" khi $x = 0$. Vậy $\max_{[-4;4]} y = 4.$

Câu 18: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x\sqrt{16 - x^2}$. Tính $M + m$

- A.** $8 - \sqrt{8}.$ **B.** $\sqrt{8}.$ **C.** 0. **D.** 8.

Lời giải

Điều kiện xác định $-4 \leq x \leq 4$. Đạo hàm $y' = \sqrt{16 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{16 - 2x^2}{\sqrt{16 - x^2}}.$

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 16 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{8}$

Xét $y(-4) = y(4) = 0$; $y(-\sqrt{8}) = -8$; $y(\sqrt{8}) = 8$ do đó $M = 8, m = -8$. Vậy $M + m = 0$.

Câu 19: Trên đoạn $[-4; -1]$, hàm số $y = x + \frac{9}{x-1}$ đạt giá trị lớn nhất bằng

- A.** -5. **B.** $-\frac{29}{5}.$ **C.** $-\frac{11}{2}.$ **D.** 4.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$

Ta có $y' = 1 - \frac{9}{(x-1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{9}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \notin [-4; -1] \\ x = -2 \in [-4; -1] \end{cases}$

Ta thấy $y(-4) = -\frac{29}{5}$; $y(-2) = -5$; $y(-1) = -\frac{11}{2}$. Vậy $\max_{[-4; -1]} y = y(-2) = -5.$

Câu 20: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{4}{x} + x + 1$ trên đoạn $[1; 3]$. Tính $M - m$.

A. 9.

B. 5.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = -\frac{4}{x^2} + 1 = \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in [1; 3] \\ x = -2 \notin [1; 3] \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } y(1) = 6, y(2) = 5, y(3) = \frac{16}{3} \Rightarrow M = 6, m = 5 \Rightarrow M - m = 1.$$

Câu 21: Trên đoạn $\left[\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right]$, hàm số $y = 2x^3 + \frac{1}{2x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x = \frac{1}{2}$.

B. $x = \frac{3}{2}$.

C. $x = \frac{1}{3}$.

D. $x = 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$\text{Ta có: } y' = 8x^2 - \frac{1}{2x^2}, y' = 0 \Leftrightarrow 8x^2 - \frac{1}{2x^2} = 0 \Leftrightarrow 16x^4 = 1 \Leftrightarrow x^4 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right] \\ x = -\frac{1}{2} \notin \left[\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right] \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{85}{54}, y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}, y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{85}{12} \Rightarrow \max_{\left[\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right]} y = y\left(\frac{1}{2}\right).$$

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2x+14} + \sqrt{5-x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = -7$.

B. Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{6}$.

C. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 1$.

D. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Tập xác định $D = [-7; 5]$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+14}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+14} = 2\sqrt{5-x} \Leftrightarrow x = 1(n).$$

$$f(1) = 16; f(-7) = 2\sqrt{3}; f(5) = 2\sqrt{6} \Rightarrow \max_{[-7; 5]} f(x) = 16 \text{ tại } x = 1 \text{ và } \min_{[-7; 5]} f(x) = 2\sqrt{3}$$

Vậy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{3}$ là mệnh đề đúng.

Câu 23: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\cos x - \frac{4}{3}\cos^3 x$ trên $[0; \pi]$.

A. $\max_{[0; \pi]} y = \frac{2}{3}$.

B. $\max_{[0; \pi]} y = \frac{10}{3}$.

C. $\max_{[0; \pi]} y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

D. $\max_{[0; \pi]} y = 0$.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow t \in [-1; 1]. \text{ Đặt } f(t) = 2t - \frac{4}{3}t^3, \text{ suy ra } f'(t) = 2 - 4t^2.$$

$$\text{Do đó } f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-1}{\sqrt{2}} \in [-1; 1] \\ t = \frac{1}{\sqrt{2}} \in [-1; 1] \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } f(-1) = \frac{-2}{3}, f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-2\sqrt{2}}{3}, f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}, f(1) = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy } \max_{[0; \pi]} y = \max_{[-1; 1]} f(t) = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $(-4; 4)$ và có bảng biến thiên như sau:

x	-4	2	0	4	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	-10	0	-4	10	

- a) $\min_{(-4; 4)} y = -4$ và $\max_{(-4; 4)} y = 10$.
- b) $\max_{(-4; 4)} y = 10$ và $\min_{(-4; 4)} y = -10$.
- c) $\max_{(-4; 4)} y = 0$ và $\min_{(-4; 4)} y = -4$.
- d) Hàm số không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $(-4; 4)$.

Lời giải

Theo định nghĩa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất, ta thấy hàm số không có GTLN, NN trên $(-4; 4)$.

- a) Sai: $\min_{(-4; 4)} y = -4$ và $\max_{(-4; 4)} y = 10$.
- b) Sai: $\max_{(-4; 4)} y = 10$ và $\min_{(-4; 4)} y = -10$.
- c) Sai: $\max_{(-4; 4)} y = 0$ và $\min_{(-4; 4)} y = -4$.
- d) Đúng: Hàm số không có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $(-4; 4)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = x + \frac{4}{x}, x \in (0; +\infty)$.

- a) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$ và không có giá trị lớn nhất trên $(0; +\infty)$.
- b) Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $(0; +\infty)$.
- c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$ và không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$.
- d) Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất trên $(0; +\infty)$.

Lời giải

Ta có $y = x + \frac{4}{x} \Rightarrow y' = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = x + \frac{4}{x}, x \in (0; +\infty)$

x	0	2	$+\infty$		
y'		-	0	+	
y	$+\infty$		4		$+\infty$

Căn cứ vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$ và không có giá trị lớn nhất trên $(0; +\infty)$.

a) Đúng: Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$ và không có giá trị lớn nhất trên $(0; +\infty)$.

b) Sai: Hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $(0; +\infty)$.

c) Sai: Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$ và không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$

d) Sai: Hàm số không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất trên $(0; +\infty)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			-1			$+\infty$

a) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1; 0)$; $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$

b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$ và có giá trị cực tiểu là $y = -2$

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 0$

d) Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng -3 .

Lời giải

a) Sai: Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1; 0)$; $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

b) Đúng: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$ và có giá trị cực tiểu là $y = -2$

c) Đúng: Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 0$

d) Đúng: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng -3 .

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			4		4			
	$-\infty$			3			$-\infty$	

a) Cực đại của hàm số là 4

b) Cực tiểu của hàm số là 3

c) $\max_{\mathbb{R}} y = 4$

d) $\min_{\mathbb{R}} y = 3$

Lời giải

a) Đúng: Cực đại của hàm số là 4

b) Đúng: Cực tiểu của hàm số là 3

c) Đúng: $\max_{\mathbb{R}} y = 4$

d) Sai: Từ bảng biến thiên ta thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ nên hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

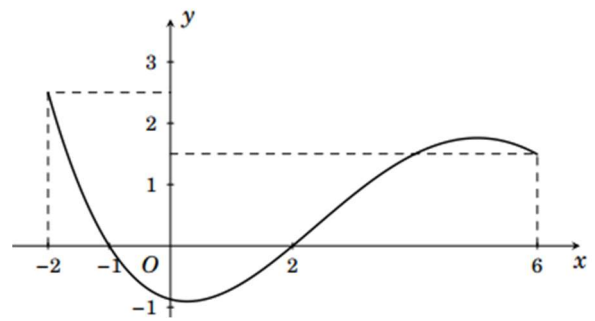
Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ bên.

a) $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(-1)$

b) $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(6)$

c) $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(-2)$

d) $\max_{[-2; 6]} f(x) = \max\{f(-1); f(6)\}$



Lời giải

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	-2	-1	2	6	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y		$f(-1)$		$f(6)$	
	$f(-2)$		$f(2)$		

Hàm số đồng biến trên $(-2; -1)$ và $(2; 6)$ do $f'(x) > 0$ nên $f(-1) > f(-2)$ và $f(6) > f(2)$

Hàm số nghịch biến trên $(-1; 2)$ do $f'(x) < 0$ suy ra $f(-1) > f(2)$

Từ đó có thể suy ra được $\max_{[-2; 6]} f(x) = \max\{f(-2); f(-1); f(2); f(6)\} = \max\{f(-1); f(6)\}$

a) Sai: $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(-1)$

b) Sai: $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(6)$

c) Sai: $\max_{[-2;6]} f(x) = f(-2)$

d) Đúng: $\max_{[-2;6]} f(x) = \max\{f(-1); f(6)\}$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 30x$. Với các số nguyên a, b mà $a < b$ thì giá trị nhỏ nhất của $f(b) - f(a)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $f'(x) = 12x^2 - 18x - 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	2	$2,5$	3	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	17	-63	$-\frac{275}{4}$	-64	$+\infty$

Với các số nguyên a, b mà $a < b$, để $f(b) - f(a)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $\begin{cases} f(b) < 0 \\ f(a) > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f(b) = f(2) = -64; f(a) = f(-1) = 17$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(b) - f(a)$ bằng -81 .

Câu 2: Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^3 x - 2\cos^2 x + 3\sin x + 6$ trên $[0; \pi]$ lần lượt là M, m . Tính tổng $M + m$.

Lời giải

Ta có $y = \sin^3 x - 2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x + 6 \Rightarrow y = \sin^3 x + 2\sin^2 x + 3\sin x + 4$.

Đặt $t = \sin x$. Do $x \in [0; \pi]$ nên $t \in [0; 1]$. Khi đó bài toán đã cho trở thành tính tổng của giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(t) = t^3 + 2t^2 + 3t + 4$ trên đoạn $[0; 1]$.

Ta có $y' = f'(t) = 3t^2 + 4t + 3 = 3\left(t^2 + 2\frac{2}{3}t + \frac{4}{9}\right) + \frac{15}{9} > 0, \forall t \in [0; 1]$.

Suy ra hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên đoạn $[0; 1]$.

Khi đó: $M = \max_{[0;1]} f(t) = f(1) = 10; m = \min_{[0;1]} f(t) = f(0) = 4$. Vậy $M + m = 14$.

Câu 3: Cho hàm số $y = e^x(x^2 - 3)$, gọi $M = \frac{a}{e^b}$ ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$) là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn

$[-5; -2]$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$?

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = e^x (x^2 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \in [-5; -2] \\ x = 1 \notin [-5; -2] \end{cases}$$

$$\text{Ta có } y(-5) = \frac{22}{e^5}; y(-3) = \frac{6}{e^3}; y(-2) = \frac{1}{e^2}. \text{ Khi đó } \max_{[-5; -2]} y = \frac{6}{e^3} \Rightarrow a = 6; b = 3 \Rightarrow a + b = 9.$$

Câu 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{16}{x}$ trên đoạn $[1; 4]$

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = x^2 + \frac{16}{x} \Rightarrow y' = 2x - \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x - \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 16 = 0 \Rightarrow x = 2 \in [1; 4]$$

$$\text{Khi đó: } y(1) = 17; y(2) = 12; y(4) = 20.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{16}{x}$ trên đoạn $[1; 4]$ bằng 12.

Câu 5: Cho hàm số $y = x + \frac{1}{x+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1; 2]$

Lời giải

$$\text{Tập xác định: } D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$\text{Ta có: } y = x + \frac{1}{x+2} \Rightarrow y' = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } y(-1) = 0 \text{ và } y(2) = \frac{9}{4}.$$

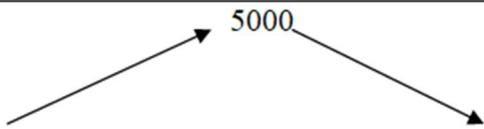
Do đó: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1; 2]$ là $y(-1) = 0$ và giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 2]$ là $y(2) = \frac{9}{4}$.

Câu 6: Một loại vi khuẩn được tiêm một loại thuốc kích thích sự sinh sản. Sau t phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức $N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3$ ($0 \leq t \leq 30$). Hỏi sau bao giây thì số vi khuẩn lớn nhất?

Lời giải

$$\text{Xét hàm số } N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3 \text{ (} 0 \leq t \leq 30 \text{)}.$$

$$\text{Ta có: } N'(t) = 60t - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 20 \end{cases}$$

t	0	20	30
N'	+	0	-
N			

Với $t = 20$ giây thì số vi khuẩn lớn nhất.

-----HẾT-----